第15講　微分法・積分法(1)

1　a，b を正の実数とする．3次関数 $f(x)=ax(x-b)^2$ は $f(4)=27$ を満たし，$0<x<4$ において極大値2をもつ．a，b の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　k を実数とする．3 次関数 $f(x)=-x^3+kx^2+kx+1$ が $x=\alpha$ で極小値をとり，$x=\beta$ で極大値をとる．3 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\beta,\ f(\alpha))$ が $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を k を用いて表せ．

(2)　k の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　x の関数 $f(x)=8^x+8^{-x}-9(4^x+4^{-x})+27(2^x+2^{-x})-26$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおく．$f(x)$ を t の関数として表したものを $g(t)$ とするとき，$g(t)$ を求めよ．

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ のとる値の範囲を求めよ．

(3)　t が(2)で求めた範囲を動くとき，関数 $y=g(t)$ の増減を調べよ．

(4)　$x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x)$ の最小値とその最小値を与える x の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 15 講　微分法・積分法(1)

関数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$（a，b は実数の定数）について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲は $a<$ **ア** である．

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 となるときの a の値を求めたい．2 つの極値をとる x の値を α，β（$\alpha<\beta$）とすると，極大値と極小値の差は $f(\alpha)-f(\beta)=$ **イ** $(\beta-\alpha)(1-a)$ である．また，$\alpha+\beta=$ **ウ** ，$\alpha\beta=$ **エ** であり，$\beta-\alpha=2\sqrt{\boxed{オ}-a}$ である．以上より $a=-$ **カ** である．これは $a<$ ア を満たす．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　微分法・積分法(1)

1　a，b を正の実数とする．3次関数 $f(x)=ax(x-b)^2$ は $f(4)=27$ を満たし，$0<x<4$ において極大値2をもつ．a，b の値を求めよ．

$f(x)=ax(x-b)^2=a(x^3-2bx^2+b^2x)$

$f(4)=27$　より　$4a(4-b)^2=27$　……①

$f'(x)=a(3x^2-4bx+b^2)=a(3x-b)(x-b)$

$a>0$，$b>0$ より　$f(x)$ の増減は右表．

x	$\cdots$	$\frac{b}{3}$	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		↑ 極大		↑ 極小	

よって，極大値の条件より　$0<\frac{b}{3}<4$　……②　　$f\left(\frac{b}{3}\right)=2$　……③

②より　$0<b<12$

③より　$a\cdot\frac{b}{3}\left(\frac{b}{3}-b\right)^2=2$　　$\frac{4ab^3}{27}=2$　　$b>0$ より　$4a=\frac{54}{b^3}$

これと　①より　$\frac{54}{b^3}(4-b)^2=27$　　$b^3-2b^2+16b-32=0$

$(b-2)(b^2+16)=0$　よって　$\boldsymbol{b=2}$（②を満たす）　このとき　$\boldsymbol{a=\frac{27}{16}}$

2　k を実数とする．3次関数 $f(x)=-x^3+kx^2+kx+1$ が $x=\alpha$ で極小値をとり，$x=\beta$ で極大値をとる．3点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\beta,\ f(\alpha))$ が $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を k を用いて表せ．

(2)　k の値を求めよ．

(1)　$f(x)=-x^3+kx^2+kx+1$　より　$f'(x)=-3x^2+2kx+k$

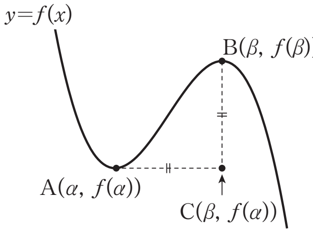
$f(x)$ が $x=\alpha$ で極小，$x=\beta$ で極大となるので，$f'(x)=0$ は $x=\alpha$，β（$\alpha<\beta$）を2解にもつ2次方程式である．

判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=k^2+3k>0$ より　$k(k+3)>0$　　$k<-3$，$0<k$　……①

また，解と係数の関係から　$\boldsymbol{\alpha+\beta=\frac{2k}{3}}$，$\boldsymbol{\alpha\beta=-\frac{k}{3}}$

(2)　AC＝BC より



$\beta-\alpha=f(\beta)-f(\alpha)$

$=-(\beta^3-\alpha^3)+k(\beta^2-\alpha^2)+k(\beta-\alpha)$

$=(\beta-\alpha)\{-(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+k(\beta+\alpha)+k\}$

$\beta-\alpha\neq0$ より　$1=-(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+k(\alpha+\beta)+k$

$=-\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}+k(\alpha+\beta)+k$

$=-\left\{\left(\frac{2k}{3}\right)^2+\frac{k}{3}\right\}+k\cdot\frac{2k}{3}+k$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$2k^2+6k-9=0$　　よって　$\boldsymbol{k=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}}{2}}$（ともに①を満たす）

3　x の関数 $f(x)=8^x+8^{-x}-9(4^x+4^{-x})+27(2^x+2^{-x})-26$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおく．$f(x)$ を t の関数として表したものを $g(t)$ とするとき，$g(t)$ を求めよ．

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ のとる値の範囲を求めよ．

(3)　t が(2)で求めた範囲を動くとき，関数 $y=g(t)$ の増減を調べよ．

(4)　$x\geqq0$ のとき，関数 $f(x)$ の最小値とその最小値を与える x の値を求めよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ のとき

$$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=t^2-2$$

$$8^x+8^{-x}=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot2^x\cdot2^{-x}(2^x+2^{-x})=t^3-3t$$

よって　$g(t)=(t^3-3t)-9(t^2-2)+27t-26=\boldsymbol{t^3-9t^2+24t-8}$

(2)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから（相加平均）≧（相乗平均）により

$t=2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$　　等号成立は　$2^x=2^{-x}$　つまり　$x=0$ のとき

よって　$\boldsymbol{t\geqq2}$

(3)　$g'(t)=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$

よって　$g(t)$ の増減は右表のようになる．

t	2	…	4	…
$g'(t)$	0	−	0	＋
$g(t)$	12	↘	8	↗

(4)　$x\geqq0$ のとき $t=2^x+2^{-x}$ は増加関数であるから，$g(t)$ が最小となるときに $f(x)$ は最小となる．

$g(t)$ の最小値は $t=4$ のとき 8

$t=4$　より　$2^x+\dfrac{1}{2^x}=4$

$2^x=X$ とおくと　$X\geqq1$ となる X の値1つに対し，x の値は $x\geqq0$ において1つ対応する．

$X+\dfrac{1}{X}=4$　　$X^2-4X+1=0$　　$X\geqq1$ より　$X=2+\sqrt{3}$

よって　$2^x=2+\sqrt{3}$　より　$x=\log_2(2+\sqrt{3})$

したがって，$\boldsymbol{x=\log_2(2+\sqrt{3})}$ のとき**最小値 8**　をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 15 講　微分法・積分法(1)

関数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$（a，b は実数の定数）について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲は $a<$ **ア** である．

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 となるときの a の値を求めたい．２つの極値をとる x の値を α，β（$\alpha<\beta$）とすると，極大値と極小値の差は $f(\alpha)-f(\beta)=$ **イ** $(\beta-\alpha)(1-a)$ である．また，$\alpha+\beta=$ **ウ**，$\alpha\beta=$ **エ** であり，$\beta-\alpha=2\sqrt{\text{オ}-a}$ である．以上より $a=-$ **カ** である．これは $a<$ **ア** を満たす．

(1)　$f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$　より　$f'(x)=3x^2-6x+3a$

$f(x)$ が極値をもつのは　$f'(x)=0$　すなわち　$x^2-2x+a=0$　について判別式より

$\dfrac{D}{4}=1-a>0$ のとき．

よって　$a<\mathbf{1}$

(2)　２つの極値をとる x の値が α，β（$\alpha<\beta$）のとき，

$\alpha<\beta$ より　$f(x)$ の増減は右のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗
		↑ 極大		↑ 極小	

ここで，$f'(x)=0$ の２解が α，β であることより，

解と係数の関係から

$\alpha+\beta=\mathbf{2}$，$\alpha\beta=\boldsymbol{a}$　である．

よって，極大値と極小値の差は

$$\begin{aligned}&f(\alpha)-f(\beta)\\&=\alpha^3-\beta^3-3(\alpha^2-\beta^2)+3a(\alpha-\beta)\\&=(\alpha-\beta)\{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3(\alpha+\beta)+3a\}\\&=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+3a\}\\&=(\alpha-\beta)(4-a-6+3a)\\&=2(\alpha-\beta)(a-1)\\&=\mathbf{2}(\beta-\alpha)(1-a)\end{aligned}$$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=4-4a$　より　$\beta-\alpha=\sqrt{4-4a}=2\sqrt{\mathbf{1}-a}$

よって　$f(\alpha)-f(\beta)=4\sqrt{1-a}\,(1-a)$

これが 32 となるとき　$\sqrt{1-a}\,(1-a)=8$

両辺を２乗して　$(1-a)^3=64$　　$1-a=4$

よって　$a=\mathbf{-3}$　　これは $a<1$ を満たす．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。